第 46 卷 第 4 期
2023 年 4 月
核 技 术 NUCLEAR TECHNIQUES
www.hjs.sinap.ac.cn
Vol.46，No.4
April 2023

相对论重离子碰撞中确定QCD相边界的若干问题

吴元芳[1] 李笑冰[1] 陈丽珠[2] 李治明[1] 许明梅[1] 潘 雪[3]
张 凡[4] 张雁华[5] 钟昱明[1]

1（华中师范大学 粒子物理研究所 武汉 430079）
2（南京信息工程大学 物理与光电工程学院 南京 210044）
3（成都工业学院 电子工程学院 成都 611730）
4（武汉光谷未来学校 武汉 430078）
5（运城学院 物理与电子工程系 运城 044000）

摘要 为了从相对论重离子碰撞实验确定量子色动力学（Quantum Chromo-dynamics，QCD）所预言的相变临界点和相边界，必须考虑实验数据中非临界涨落、有限系统尺度、有限演化时间的影响。本文综述了这三方面工作的主要内容、结果和意义。对于非临界涨落，主要讨论了由于有限事件数对观察量测量的影响，估计了在相对论重离子对撞机（Relativistic Heavy-Ion Collider，RHIC）能量扫描区，精确测量高阶守恒荷高阶矩所需要的事件数。提出用泊松分布描述有限末态粒子数所致的统计涨落，将统计涨落和实验结果比较，发现统计涨落贡献为主，必须扣除泊松主导的统计涨落。提出混合事件方法，定义动力学累积矩为原始样本的累积矩减去混合样本的累积矩，利用多相输运模型（A Multiphase Transport Model，AMPT）的default模型重建了一个与之相对应的混合事件样本，结果表明：动力学累积矩确实能很好地扣除泊松样的统计涨落，尤其是中心度bin宽度和探测器效率的影响。对于有限系统尺度的影响，利用三维三态Potts模型研究了各种有限系统尺度下，它的磁化强度的高阶感应率在一级相变、临界点，以及平滑过渡区域的行为。发现在固定外场，穿越相边界的时候，从二阶到六阶磁化率都会出现非单调行为，或符号的变化，而且在三个相变区域，非单调行为类似。因此，仅从非单调行为不能区分不同级数的相变。进一步研究了磁化率的有限尺度标度行为，它们的标度指数在不同级数相变中是不一样的，可以区分不同级数的相变。根据观测量的有限尺度标度性，给出了用固定点确定临界参数的定量方法，并将该方法应用到三维三态Potts模型模拟产生的数据分析，展示了方法的精确有效性。对于非平衡演化的影响，采用Metropolis算法模拟了三维Ising模型在临界点附近从非平衡到平衡的演化过程。发现其序参量在演变过程中以指数形式趋近其平衡值，这与动力学朗之万方程给出的结果相同。临界温度下的平均弛豫时间随系统尺度的z次幂发散，表明它能很好地表示动力学方程中的弛豫时间。非平衡演化过程中序参量的三阶矩和四阶矩会出现正、负值震荡，符号取决于观测时间，结果与平滑过渡区动力学模型一致。研究还发现，在平滑过渡区，非平衡演化持续时间非常短，非平衡对观察量的影响非常弱；但是在一级相变线上，非平衡弛豫的时间非常长，非平衡豫影响不可忽略。这些定性特征对实验确定QCD的临界点和相边界具有重要的指导意义。

关键词 相对论重离子碰撞，QCD相变，非临界涨落，有限系统尺度，非平衡

中图分类号 TL61，TL61^{+}2

DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040006

国家重点研发计划(No.2022YFA1604900)、国家自然科学基金(No.12275102)资助
第一作者：吴元芳，女，1963年出生，1990年于华中师范大学获博士学位，研究领域为高能重离子碰撞、高能物理唯象学，E-mail：wuyf@ccnu.edu.cn
收稿日期：2022-12-25，修回日期：2023-02-21
Supported by the National Key Research and Development Program of China (No.2022YFA1604900), National Natural Science Foundation of China (No.12275102)
First author: WU Yuanfang, female, born in 1963, graduated from Central China Normal University with a doctoral degree in 1990, focusing on high-energy heavy ion collisions, high-energy physics phenomenology, E-mail: wuyf@ccnu.edu.cn
Received date: 2022-12-25, revised date: 2023-02-21

Several problems in determining the QCD phase boundary by relativistic heavy ion collisions

WU Yuanfang[1] LI Xiaobing[1] CHEN Lizhu[2] LI Zhiming[1] XU Mingmei[1] PAN Xue[3] ZHANG Fan[4] ZHANG Yanhua[5] ZHONG Yuming[1]

1(*Institution of Particle Physics*, *Central China Normal University*, *Wuhan 430079*, *China*)

2(*School of Physics and Optoelectronic Engineering*, *Nanjing University of Information Science and Technology*, *Nanjing 210044*, *China*)

3(*School of Electronic Engineering*, *Chengdu Technological University*, *Chengdu 611730*, *China*)

4(*Wuhan Optical Valley Future School*, *Wuhan 430078*, *China*)

5(*Department of Physics and Electronic Engineering*, *Yuncheng University*, *Yuncheng 044000*, *China*)

Abstract The goal of relativistic heavy-ion collisions is to determine the phase boundary of quantum chromodynamics (QCD) phase transitions. Critically sensitive observables are suggested to be higher-order cumulants of conserved charges. The non-monotonous behavior of higher cumulants was observed at the relativistic heavy-ion collider (RHIC). However, it remains unclear whether these non-monotonous behaviors are critically related. We studied the influences of non-critical fluctuations, finite system size, and limited evolution time to determine if they cause non-monotonous behavior. First, we examined the minimum statistics required for measuring the fourth cumulant. The minimum statistic obtained using the centrality bin width correction (CBWC) method was 25 M. We suggest using a 0.1% centrality bin in the CBWC method instead of each Nch. With a 0.1 centrality bin width, 1 M statistics are sufficient. We then pointed out the statistical fluctuations from the limited number of final particles. By assuming the independent emission of each positive (or negative) charged particle, the statistical fluctuations of positive (or negative) charged particles were presented by a Poisson distribution, and the statistical fluctuations of net-charged particles were their evolution. The obtained statistical fluctuations for net protons, net electronic charges, and net baryons were consistent with those from the Hadron Resonance Gas model. In addition, the measured cumulants at RHIC/STAR are dominated by these Poisson-like statistical fluctuations. At the end of this section, we suggest the pooling method of mixed events and demonstrate that the sample of mixed events accurately presents the contributions of the background. Dynamic cumulants were defined as the cumulant of the original sample minus that of the mixed sample. Dynamical cumulants were shown to simultaneously reduce the influence of the statistical fluctuations, centrality bin width effects, and detector efficiency. Second, because the system is finite, the correlation length at the critical point is not developed to infinity in contrast to the system at thermal limits. Using a Monte Carlo simulation of the three-dimensional three-state Potts model, we demonstrated the fluctuations of the second- and fourth-order generalized susceptibilities near the temperatures of the external fields of the first-, second-, and crossover regions. Both the second- and fourth-order susceptibilities showed similar peak-like and oscillation-like fluctuations in the three regions. Therefore, non-monotonic fluctuations are associated with the second-order phase transition and the first-order phase and crossover in a finite-size system. The exponent of finite-size scaling (FSS) characterizes the order of transitions or crossover. To determine the parameters of the phase transition using the FSS, we studied the behavior of a fixed point in the FSS. To quantify the behavior of the fixed point, we define the width of the scaled observables of different sizes at a given temperature and scaling exponent ratio. The minimum width reveals the position of the fixed point in the plane of the temperature and scaling exponent ratio. The value of this ratio indicates the nature of the fixed point, which can be a critical, first-order phase transition line point, or crossover region point. To demonstrate the effectiveness of this method, we applied it to three typical samples produced by a three-dimensional three-state Potts model. The results show that the method is more precise and effective than conventional methods. Possible applications of the proposed method are also discussed. Finally, because of the limited evolution time, some processes in relativistic heavy-ion collisions may not reach thermal equilibrium. To estimate the influence of the nonequilibrium evolution, we used the three-dimensional Ising model with the Metropolis algorithm to study the evolution from nonequilibrium to equilibrium on the phase boundary. The order parameter exponentially approaches its equilibrium value, as suggested by the Langevin equation. The average

relaxation time is defined. The relaxation time is well represented by the average relaxation time, which diverges as the zth power of the system size at a critical temperature, similar to the relaxation time in dynamical equations. During nonequilibrium evolution, the third and fourth cumulants of the order parameter could be positive or negative depending on the observation time, which is consistent with the calculations of dynamical models at the crossover side. The nonequilibrium evolution at the crossover side lasts briefly, and its influence is weaker than that at the first-order phase transition line. These qualitative features are instructive for experimentally determining the critical point and phase boundary in quantum chromodynamics.

Key words Relativistic heavy ion collisions, QCD phase transition, Non-critical fluctuations, Finite system size, Non-equilibrium

相对论重离子碰撞的一个主要科学目的是确定量子色动力学（Quantum Chromo-dynamics，QCD）的相图。为实现这个目标，人们设计并开展了大量的实验。目前，在美国布鲁克海文国家实验室正在进行的相对论重离子碰撞能量扫描计划（Relativistic Heavy-Ion Collider Beam Energy Scan，RHIC-BES）II[1]，以及未来俄罗斯的NICA（Nuclotron-based Ion Collider Facility）、德国的FAIR（Facility for Antiproton and Ion Research）和中国的HIAF（High Intensity Heavy-ion Accelerator Facility）实验计划都是希望通过能量扫描发现与QCD相变相关的观测信号，实现在实验上确定QCD相变临界点和相边界[1-3]。因此，未来十年，QCD相变相关的研究将是相对论重离子碰撞的国际前沿。

QCD预言在足够高的温度和低重子化学势的条件下，物质会发生从强子气体到夸克胶子等离子体的相变。格点QCD理论计算表明：在高温零化学势附近，从强子到夸克胶子等离子体的转变不是一个真正的相变，而是一个解析的平滑过渡[4-5]。基于QCD的唯象模型预言：在低温和高重子化学势时，强子到夸克胶子等离子体的相变是一级相变[6]，一级相变线的终止点是QCD的临界点[7]，QCD的相图由一级相变线和临界点完全确定。

根据格点QCD理论和有效势模型，守恒荷的高阶矩对于关联长度特别敏感，且在临界点附近可能会出现非单调行为和符号变化，因此，QCD相变临界点的敏感观测量是末态守恒荷粒子的高阶矩[8-10]。在RHIC/BES I上，人们已经观测到净质子数的四阶矩随碰撞能量的变化具有非单调行为[3,11-14]，但是，非单调行为并不是临界涨落所独有的特征。在一级相变和平滑过渡时，相变相关的涨落也会有非单调性[15-16]；另外，实验还观测到在各种碰撞能量下，净质子数的三阶矩都是小于泊松结果的负值，这与平衡相变所预期的正定结果不相符[2-3]。

为了确定所观测到涨落的临界特征，大量理论和实验数据分析工作致力于扣除各种可能的非临界效应的影响。我们知道，临界涨落是由于事件内部粒子之间的关联所致，其关联长度具有发散的特征，而非临界的涨落不具有关联长度发散的特征，非临界涨落有两个主要来源：一是源于传统的守恒机制，如共振衰变，以及能量、动量、电荷数的整体守恒。这些传统效应的关联长度收敛且固定。相对于临界涨落，非临界涨落通常比较小，对于守恒荷高阶矩的影响也是固定的。第二个来源是由观察系统本身的局限性和特点所致，例如：有限事件数（即：统计量）所带来的测量不确定性[17-18]、有限粒子数引起的统计涨落[19-20]、不同碰撞参数导致初态系统尺度的涨落、中心度宽度、探测器的接收效率与有限实验探测相空间所给出的人为截断[21-23]等。

为扣除传统关联机制和系统效应所带来的非临界涨落，人们尝试提出了针对各种效应的修正方案。例如：1）对于统计涨落的影响，通常采用具有相同粒子平均数的泊松分布来模拟[17-19]；2）在一个给定的中心度宽度中，实际上混杂了多个碰撞参数并不完全相同事件的叠加，通常高阶矩随中心度宽度变化不是平滑的。为了减少由此带来的影响，普遍采用了一种被称为中心度宽度修正（Centrality Bin Width Correction，CBWC）的方案[23]；3）相对论重离子碰撞实验中，有部分末态粒子没有被探测器观察到，这会直接影响粒子数分布的峰值以及累积矩。为了消除这种探测器效率的影响，人们建立了真实累积矩与实际测量累积矩之间的对应关系，利用对应关系进行修正[21]。但是，对于一个真实的样本，所有这些非临界效应是相互联系的，很难单独地将某一种效应消除掉。一种更好的消除思路是同时将这些非临界效应进行处理，混合事件方法提供了得到这种背景的可能[24-25]。

本文将在§1讨论这些非临界效应的影响和扣除。首先，在§1.1讨论有限事例数对高阶矩，尤其是四阶和六阶矩的影响[26-28]；接着在§1.2介绍对统计涨落的描述，以及统计涨落对高阶矩实验测量结果的影响；最后在§1.3给出有效混合事件的池子方法，

定义动力学高阶矩为原始样本的高阶矩减去混合样本的高阶矩，并展示动力学高阶矩对扣除非临界涨落的有效性。

除了非临界涨落以外，我们知道还有两个重要且不可忽略的因素，首先，相对论重离子碰撞所形成的系统不是热力学极限下的无穷大，而是只有几个fm的大小，因此，必须考虑有限系统尺度对观测量的影响；同时，系统的演化时间也只有10 fm·c^{-1}左右，非常有限[29]，因此系统很可能不能全部达到热力学的平衡态，必须考虑非平衡演化对观测量的影响。这两个因素对于正确决定临界点、相边界在QCD相图上的位置至关重要。

有限系统尺度效应使临界关联长度的发散受到限制，涨落信号会偏离热力学极限下的数值[30-32]，例如，在热力学极限下，磁化率在一级相变处是一个δ函数，在二级相变处是发散的无穷大。但是，对于有限尺度系统，磁化率在一级和二级相变处都是一个有限峰值，并且其峰值在相图上所对应的位置，如临界温度也会偏离其临界值，变为赝临界温度[28]。本文§2.1将利用三维三态Potts模型完整展示有限尺度系统在相边界附近的这些特征。

对于有限尺度系统，要精确确定其临界点位置，必须利用观察量的有限尺度标度性。我们知道，对于像磁化率这样的观察量，它能够很好地用有限尺度标度性来描述。有限尺度标度性不仅精确给出了临界温度的数值，而且根据其标度指数的数值还能判定相变的级数[31-32]。

对于给定的系统和观察量，其有限尺度标度性的具体形式必须通过观测量在不同系统尺度下随温度的变化行为来确定。为此，一般传统的做法是：先假定临界特征参数，即临界温度和临界标度指数率，选自变量为标度约化温度，画观察量在不同系统尺度标度下的曲线，根据曲线在临界约化温度处的重合情况来判断事先给定的特征参数是否正确[33]。显然，这种传统方法存在局限性，首先，标度曲线重合情况大多是由肉眼来判断，无法定量描述其标度的精确度。而且，在临界约化温度附近，由于尺度因子的加入，相应的标度曲线重合区域非常大，导致对应的相变特征参数有很大的不确定范围。

如果将自变量从标度约化温度换为温度，标度曲线将仅在相变温度处交于一点，即固定点。在偏离相变温度处，不同尺度的曲线彼此分开，固定点位置所对应的温度和标度指数率即为临界温度和临界标度指数率。在重整化群理论中，临界点为不稳定固定点，一级相变线上存在不连续的固定点。利用相边界上的固定点行为，可以精确决定临界参数。本文将在§2.2详细介绍由相边界上观测量的固定点行为定量确定其临界参数的方法[31-32]。

对于非平衡演化，目前还没有成熟的非平衡统计理论，非平衡效应对相变以及临界涨落的影响尚无法定量估计。基于非平衡演化的动力学理论也只能局限于对平滑过渡区域进行定量计算[34-37]。要估计非平衡效应对临界点、一级相边界，以及相边界附近的影响，我们必须寻求新的描述非平衡演化的有效模型和方法。

众所周知，平衡相变是系统自发对称性破缺时所发生的物理现象，具有相同对称性的系统所发生的相变属于同一个普适类，同一普适类的系统具有相同的临界指数。在统计物理中，Ising模型是研究相变特征最有效的模型之一，它很好地展示了真实相变系统的动力学特征。QCD和三维Ising模型的临界点同属于Z(2)对称群的普适类[38-39]，通过选择适当的映射关系，可以将Ising模型的温度和外场映射到对应QCD系统的温度和化学势[40]。

在临界点附近，非平衡演化的共同特征是弛豫时间按动力学指数的幂次发散，动力学指数依赖于具体的系统参数和算法。虽然，三维Ising系统的动力学指数与QCD系统不完全一样，定量的数值结果不具有直接的可比性。但是，非平衡演化在整个相边界的定性特征，如：非平衡效应对温度（或相边界区域）的依赖性、非平衡效应是否会改变序参量及其高阶累积矩的符号等，这些定性特征可以帮助我们估计非平衡效应对QCD系统的影响。§3.1首先利用Metropolis算法模拟三维Ising模型的非平衡演化，分析在临界点附近非平衡演化的动力学特征，给出对非平衡态的定量描述；然后，§3.2给出磁化强度各阶矩随观察时间的变化；最后，§4给出了对所有工作的总结。

1　非临界涨落的影响

1.1　统计量的影响

如前所述，相对论重离子碰撞中临界涨落敏感的观察量是守恒荷的高阶矩，各阶矩的公式定义为：

$$C_1=\langle X\rangle,C_2=\langle(\delta X)^2\rangle,C_3=\langle(\delta X)^3\rangle,C_4=\langle(\delta X)^4\rangle-3\langle(\delta X)^2\rangle^2,$$
$$C_5=\langle(\delta X)^5\rangle-10\langle(\delta X)^3\rangle\langle(\delta X)^2\rangle,C_6=\langle(\delta X)^6\rangle-10\langle(\delta X)^3\rangle^2+30\langle(\delta X)^2\rangle^3-15\langle(\delta X)^4\rangle\langle(\delta X)^2\rangle \tag{1}$$

其中：$\delta X=X-\langle X\rangle$。$C_1$是序参量的平均值；$C_2$是分布的方差即$\sigma^2$；$C_3$、$C_4$与分布的偏度$S=C_3/(C_2)^{3/2}$、

峰度 $k = C_4/C_2^{\,2}$ 直接相关，偏度和峰度是对分布非高斯性的量化。

对于相对论重离子碰撞中的大多数观测量，如：净质子数的平均值、二阶矩等，我们都不需要考虑统计量的问题，因为对于这些普通的观察量，目前实验的统计量已经足够保证其精准度。但是，对于高阶矩，尤其是四阶或六阶矩，精准测量要求的统计量将会对应地成幂指数增长。因此，我们必须首先回答的问题是：目前和未来实验的统计量是否能保证高阶矩测量的精准度，或者说多少统计量才能保证其精准度？

另外，相对论重离子碰撞中，守恒荷高阶矩测量方法的特殊性也使我们必须关注其统计量的基本要求。在高阶矩测量值的估计中，其对应碰撞中心度参数由多重数区间决定，为了消除这个区间中不同多重数所代表初始体积的涨落，对给定中心度的多重数区间，人们首先在每个多重数Nch计算其高阶矩，然后把每个Nch的事件数做为权重因子，对应中心度的高阶矩是Nch区间（bin）中每个Nch高阶矩的加权平均，这方法就是所谓的中心度bin宽度方法，即：CBWC方法[23]。

显然，这方法会导致一个问题，那就是虽然实验的总统计量都是百万量级的事件数，而分配到每个Nch bin（特别是0%~5%的Nch bin），甚至每个Nch上的统计量却非常有限。以Au+Au碰撞 $\sqrt{s_{\rm NN}}$= 7.7 GeV为例，目前用来分析净质子 $\kappa\sigma^2$ 的总事件数（0%~80%中心度）有3 M。在0%~5%中心度，确定中心度的Nch bin至少有100个Nch，粗略平均，每个Nch上只有1 900个事件，所以每个Nch上计算得到的高阶矩的统计误差非常大。

因此，由于守恒荷高阶矩本身的特点，以及其测量方法的特殊性，必须估计其精确测量所需要的基本统计量。下面先以四阶矩为例进行讨论[41−42]。我们知道，只有在统计量足够多，实验随机观察量的分布才是正态分布，即：满足中心极限定理（Central Limit Theorem，CLT）。只有在满足CLT的条件下，观测量的平均值才等于其真实值，并且不依赖于统计量，即 $\langle X\rangle_{n_1} = \langle X\rangle_{n_2} = \langle X\rangle_{n_3}$，其中：$n_1$、$n_2$、$n_3$ 为不同的统计量。

我们用UrQMD模型模拟金-金碰撞，在 $\sqrt{s_{\rm NN}}$= 11.5 GeV能量下，总共产生了250 M个事件，这个事件数的量级与目前RHIC相对论重离子碰撞实验的统计量相当。然后，将总样本分别随机分成250、50及10个子样本，每个子样本对应的统计量分别为1 M、5 M及25 M。在每个子样本中，用CBWC方法计算中心度在0%~5%的净质子四阶矩，结果发现，$\langle\kappa\sigma^2\rangle$ 随着统计量而增加，违背了中心极限定理，其原因是每个Nch的事件数太少，没有达到中心极限定理的要求。

其实，在现有统计量的情况下，可以尝试改进对高阶矩的估计方法，即：寻找一个适当宽一点的Nch bin来代替每个Nch，这样每个Nch bin中的事件数就增加了，每次计算 $\kappa\sigma^2$ 的精准度就可以得到提高。当然，适当加宽Nch bin的条件必须保证不影响其代表的初始体积，即：必须与每个Nch有相同的分辨率。为了寻找适当的Nch bin宽度，将0%~5%中心度分成不同的bin宽度，如25个bin（δ0.2%中心度）、5个bin（δ1.0%中心度）、2个bin（δ2.5%中心度）、每个Nch以及直接用0%~5%中心度。同时，为了讨论在不同Nch bin宽度情况下所得结果对统计量的依赖性，我们把模型产生的数据随机分成250、125、50、25、10以及5个子样本，每个子样本对应的统计量分别为：1 M、2 M、5 M、10 M、25 M以及50 M。按照CBWC方法，首先计算每个子样本对应的 $\kappa\sigma^2$，然后平均得到 $\langle\kappa\sigma^2\rangle$，对于净质子和净电荷的结果分别如图1(a)和(b)所示。

由图1可见，当总统计量大于1 M后，用 δ1.0%、δ2.5%、δ5.0%得到的 $\langle\kappa\sigma^2\rangle$ 都与统计量无关，但是，对于每个Nch，只有当总统计量大于25 M以后，所得结果才与统计量无关，且与用 δ1.0%的结果一致，表明此时 δ1.0%可以与每个Nch一样准确地代表初始体积。同时，我们看到 δ2.5%及 δ5.0%得到的 $\langle\kappa\sigma^2\rangle$ 明显要高于每个Nch（或 δ1.0%）计算的结果，说明这样选择的Nch bin宽度太大了，不能与每个Nch一样代表初始体积，因此，只有 δ1.0%可以代替每个Nch。

可见，对于四阶矩，基本的统计量要求是：如果

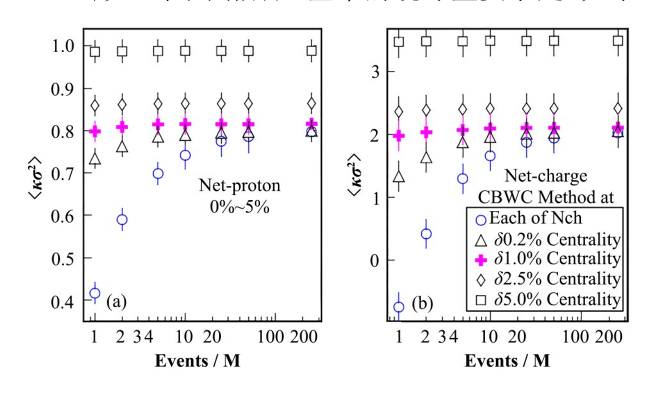


图1 不同的CBWC bin宽度情况下得到的净质子与静电荷的对 $\kappa\sigma^2$ 统计量的依赖性

Fig.1 Statistics dependence of $\kappa\sigma^2$ of net-proton (a) and net-charge (b) multiplicity distributions calculated by the CBWC method at various centrality bin width

按每个Nch计算，总统计量必须大于25 M；如果按δ1.0%计算，总统计量到1 M量级就可以了，并且，该结论其他碰撞中心度情况下也成立。因此，在总样本统计量低于25 M的情况下，由每个Nch计算得到的四阶矩很可能不可靠，利用δ1.0%中心度作为Nch bin宽度计算的结果会更可靠。

对于净质子的六阶矩[17–18]，基本统计量的要求比四阶矩更高。我们研究了在0.4 GeV·c^{-1} < $p_{\rm T}$ < 0.8 GeV·c^{-1}以及$|y|$<0.5截断条件下，当总事件统计量从1 M增加到300 M时，在0%~30%中心度，每个Nch下计算得到的$\langle C_6/C_2\rangle$一直随着统计量的增加而增加，说明在这个相空间截断下，即使统计量达到300 M量级，测量得到的C_6/C_2都不可靠。

1.2 统计涨落的影响

我们知道，泊松分布可以描述相互独立、彼此没有关联粒子的随机涨落，即统计涨落。如果一个随机变量X，满足泊松分布，且其平均值为λ，那么，对于随机变量为k=0，1，2，... 非负整数，概率分布为$f(k;\lambda)=Pr(X=k)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!$，RHIC实验中产生的粒子，分别有带重子数为1的强子，带电荷数为1或者2的强子，也有带奇异数为1、2或3的强子，以及它们相应的反粒子。从最简单的情形出发，假设重子数(N_1^B)和反重子的数(N_{-1}^B)都服从泊松分布。那么，净重子数($N_B=N_1^B-N_{-1}^B$)的概率分布是两个泊松分布的互关联(cross-correlation)，即：

$$f\left(N_B;\langle N_1^B\rangle,\langle N_{-1}^B\rangle\right)=\sum_{x=-\infty}^{\infty} f\left(N_B+x,\langle N_1^B\rangle\right) f\left(x,\langle N_{-1}^B\rangle\right)=e^{-(\langle N_1^B\rangle+\langle N_{-1}^B\rangle)}\left(\langle N_1^B\rangle/\langle N_{-1}^B\rangle\right)^{N_B/2} I_{N_B}\left(2\sqrt{\langle N_1^B\rangle\langle N_{-1}^B\rangle}\right) \quad (2)$$

其中：$\langle N_1^B\rangle$和$\langle N_{-1}^B\rangle$分别是N_1^B和N_{-1}^B的平均值；$I_{N_B}(z)$是修正后的第一类贝塞尔函数。式(2)是一个标准的Skellam分布[43]，这样给出的净重子数概率分布与HRG模型得到的结果相同[44]。净重子的高阶矩(κ_k^B)可由矩的生成函数(Cumulant-generating Function，CGF)得到：

$$K_B\left(t;\langle N_1^B\rangle,\langle N_{-1}^B\rangle\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\kappa_k^B \quad (3)$$

其中：$K_B\left(t;\langle N_1^B\rangle,\langle N_{-1}^B\rangle\right)=\ln G\left(e^t;\langle N_1^B\rangle,\langle N_{-1}^B\rangle\right)$；$G\left(t;\langle N_1^B\rangle,\langle N_{-1}^B\rangle\right)$是Skellam分布的概率PGF，即：

$$\begin{aligned}G\left(t;\langle N_1^B\rangle,\langle N_{-1}^B\rangle\right)&=\sum_{N_B=0}^{\infty} f\left(N_B;\langle N_1^B\rangle,\langle N_{-1}^B\rangle\right)t^{N_B}\\&=G\left(t;\langle N_1^B\rangle\right)G\left(1/t;\langle N_{-1}^B\rangle\right)\\&=e^{-(\langle N_1^B\rangle+\langle N_{-1}^B\rangle)+\langle N_1^B\rangle t+\langle N_{-1}^B\rangle/t}\end{aligned} \quad (4)$$

因此，净重子的偶、奇数阶矩分别为：

$$\kappa_{2k}^B=\langle N_1^B\rangle+\langle N_{-1}^B\rangle,\ \kappa_{2k+1}^B=\langle N_1^B\rangle-\langle N_{-1}^B\rangle \quad (5)$$

它们由重子和反重子数的平均值唯一确定。对于带电粒子、带奇异荷的粒子，如果每种粒子的多重数服从泊松分布，我们可以类似地推导，它们也都和玻尔兹曼近似下的强子共振气体模型得到的结果一致[44]。

根据RHIC三个碰撞能量($\sqrt{s_{\rm NN}}$=19.6 GeV、62.4 GeV和200 GeV)，9个中心度下(能量为19.6 GeV时，只有5个中心度)的质子和反质子数的平均值，我们分别计算了净质子数统计涨落的标准差$\sigma_{\rm P}$、偏$S_{\rm P}$和峰度$\kappa_{\rm P}$，结果发现：所有的统计涨落的矩都与实验测到的矩靠得非常近[20]，它们之间的差值比原值小了一个数量级。因此，RHIC上产生的净质子数高阶矩的中心度和能量依赖性主要是统计涨落的结果，观察量守恒荷高阶矩中的统计涨落不可忽略！

1.3 混合事件方法

对于一个真实的样本，各种非临界效应相互联系，很难单独地将某一种效应扣除，更好的扣除思路是用包含相同背景的本底样本，即：混合事件样本。通常，一个混合事件中的粒子是随机地从不同的原始事件中挑选，同时保持混合事件样本的总粒子数与原始样本一致。因此，混合事件样本具有与原始样本相同的统计涨落、初态系统尺度涨落、中心度分饼宽度、探测效率以及实验截断。

相对重粒子对撞中，混合事件方法已经被应用于多种观测量，例如两粒子关联、粒子产额、横动量谱、椭圆流等。不同的观测量构造混合事件的方法并不完全相同。例如，两粒子快度关联，关注的动力学特征是在给定的事件中粒子的快度方位，所以其混合事件是将一个给定事件中所有粒子的真实快度方位进行随机替换。对于守恒荷的高阶矩，关注的动力学特征是守恒荷的粒子数。所以混合事件的目的是消除守恒荷粒子之间的关联，以及给定守恒荷粒子数与事件之间的关联。

我们发现最好的方法是最随机性的池子方法，如果原始样本的统计量足够大，即大于1 000个事件时，粒子总数可以近似为无限多，可以将全部粒子放入一个池子里面，然后，从池子里随机挑选N_c个带荷粒子，这N_c个粒子可以近似看作是从不同的原始事

件中选出，它们之间的关联近似为零。从池子中随机挑选一个带电粒子的概率是一个常数，混合样本中的守恒荷粒子数的平均值与原始样本保持一致。这样得到的混合样本不再具有与真实事件相关的临界涨落，但是，保留了事件的整体与系统特征。如果将动力学累积矩定义为原始样本的累积矩减去混合样本的累积矩，那么，动力学累积矩就代表了临界相关的涨落。

利用多相输运模型（A Multiphase Transport Model，AMPT）的default模型模拟产生了19.6 GeV金-金碰撞样本，针对统计涨落、中心度分饼宽度，以及探测器效率的扣除公式，逐一比较动力学累积矩与使用扣除公式后的结果。其中，横动量截断和快度截断分别为：0.4 GeV ≤ p_T ≤ 0.8 GeV 和 −0.5 ≤ y ≤ 0.5，与RHIC/STAR实验中所采用的截断一致。质子数近似为总净重子数，即：N_c=N_p。

图2展示了$\kappa\sigma^{2,o}$的中心度依赖性，为了观察探测器效率的影响，分别以80%和60%的概率来随机选择粒子，然后分别计算对应的累积矩。其中圆圈标示100%，方框标示80%，三角形标示60%。图2(a)是在三种不同的探测器效率影响下，原始样本中$\kappa\sigma^{2,o}$的中心度依赖性，可见，三组点之间相互分离，累积矩随探测器的效率而变化，且探测器效率的影响依赖于中心度。图2(b)是在三种不同探测器效率影响下，混合样本的$\kappa\sigma^{2,m}$的中心度依赖性，探测器效率同样影响了混合样本的矩，而且与图2(a)中对于原始样本的影响类似。

利用文献[45−46]中的公式，图2(d)给出了公式修正后不依赖于探测器效率的$\kappa\sigma^2_{fc}$。由图2(d)可见，方框和三角都与对应的圆圈在误差棒的范围内重合，这说明公式修正后的累积矩很好地扣除了探测器效率的影响。图2(c)是在三种不同探测器效率影响下，动力学$\kappa\sigma^2_{dyn}$随中心度的变化，可见三组不同的点在误差范围内都基本重合。这表明动力学$\kappa\sigma^2_{dyn}$与公式修正后的结果一样，都不依赖于探测器效率，都扣除了探测器效率的影响。而且，动力学累积矩不仅减去了统计涨落，同时还减去了中心度和探测器效率的影响。

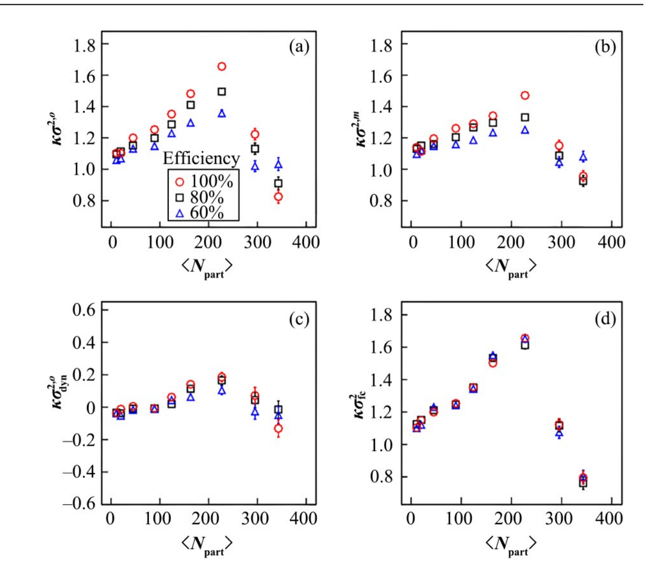


图2 探测效率分别为100%、80%和60%时，由原始样本(a)、混合样本(b)、动力学(c)和公式修正后(d)所得到的$\kappa\sigma^2$随中心度的变化

Fig.2 The centrality dependency of $\kappa\sigma^2$ of original (a) and mixed (b) samples, dynamical (c) and formula corrected (d) for three values of efficiency 100%, 80% and 60%

2 有限系统尺度的影响

2.1 有限系统尺度对相变涨落的影响

在大重子化学势以及手征极限附近，由于格点QCD的计算还存在重重困难，为了计算有限尺度系统的热力学量在相边界附近的涨落，人们常常借助一些唯象模型和有效理论，与QCD相变同属一个普适类的模型有三维伊辛、O(4)和O(2)自旋模型，以及三维三态Potts模型。三维Ising模型是由N个排列在L×L×L个晶格点阵上的粒子组成，粒子的自旋方向可以向上，也可以向下，用+1表示向上，−1表示向下，系统的状态可以由一系列自旋表示，即：$\{s_1, s_2, \cdots, s_N\}, s_i = \pm 1, i = 1, 2, \cdots, N$，以下使用简写符$\{s_i\}$表示。如果仅考虑最近邻粒子的相互作用，以及粒子与外部磁场H的相互作用，总能量可以表示为：

$$E_{\{s_i\}} = -J\sum_{<ij>} s_i s_j - H\sum_{i=1}^{N} s_i \tag{6}$$

其中：符号$<i,j>$表示只对所有最近邻粒子的自旋求和。系统在某个微观状态$\{s_i\}$的平均总磁化强度和平均磁化强度分别为：

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_T = \left\langle \sum_{i=1}^{N} s_i \right\rangle, m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i \tag{7}$$

当温度$k_BT \ll J$，自旋-自旋相互作用相对较强，所有的粒子倾向于呈同一指向排列，此时的$|m|$接近于1，系统处于有序相；当温度$k_BT \gg J$，自旋-自旋相互作用相对较弱，每个格点的自旋状态随机地向上，或者向下，$|m|$接近零，系统处于完全无序的状态。在没有外场的情况下，系统从高温无序相到低温有序相的转变是连续相变，相变点称为居里点，居里点是温度T和外磁场H平面上的临界点，临界点的温度用T_c表示。人们通过有限尺度标度分析方法，计算出了三维伊辛模型的临界温度T_c=4.51[47]，与重整化群理论的结果一致[48]。

三维三态Potts模型是有限温度纯规范QCD理论的一个简单有效模型，它的临界点、相边界可以通过三维Ising模型直接映射到QCD相边界。因此，我们利用三维三态Potts模型，以及其磁化强度高阶矩行为的普适性，展示其磁化强度的高阶感应率在一级相变、临界点、平滑过渡区域的行为，以及这些高阶感应率的有限尺度特征。

Potts模型每个格点上的自旋可以取多个离散值，通常这些值用从1开始的整数表示，一个q态的Potts模型，其自旋可以取整数s=1，2，⋯，q。任意相邻的两个自旋，如果有相同的值，则贡献一个J给哈密顿量；如果不相同，则贡献0。如果自旋刚好和外场的方向相同，则贡献H给哈密顿量，如果不相同，则贡献0。因此哈密顿量可以表达如下：

$$H^* = -J\Sigma_{\langle ij \rangle}\delta(s_i, s_j) - H\Sigma_i\delta(s_i, s_g) \tag{8}$$

其中：J是最相邻自旋$\langle ij \rangle$之间的相互作用，在此我们让其值为1。符号$\delta(s_i, s_j)$在$i=j$时取1，$i \neq j$时取0。s_g是所谓的ghost spin，它的方向就是外场的方向。Potts模型的配分函数可定义为$Z(\beta, h) = \sum_{\{s_i\}} e^{-(\beta E - hM)}$，其中：$E = -J\sum_{\langle ij \rangle}\delta(s_i, s_j)$是相邻自旋之间的相互作用能；$M = \sum_i \delta(s_i, s_g)$是磁化强度；$h = \beta H$是约化外场；$\beta = 1/T$是温度的倒数。

三维三态Potts模型的自旋s_i可以取1、2、3三种状态，并且自旋位于一个立方晶格上。满足Z(3)对称性，Z(3)对称性的自发破缺被认为是导致淬火QCD的退禁闭相变的原因，而加入外场导致Z(3)对称性破缺就像QCD里面费米子多项式破坏了Z(3)对称性一样。文献[49–50]指出，在高温重夸克质量的情况下，QCD可简化为三维三态Potts模型。该模型的序参量可用磁化强度的平均值$m = \frac{3}{2}\frac{\langle M \rangle}{V} - \frac{1}{2}$来定义[51]。

在QCD纯规范理论里，序参量是Polyakov loop，它起到了磁化强度的作用，表征退禁闭相的中心对称性自发破缺。三维三态Potts模型在零外场的情况下是一个温度驱使的一级相变，而当外场逐渐增大时，一级相变将变弱并终止于一个二级相变点，即临界点，越过临界点后，则是平滑过渡区域。这个与QCD相变类似，QCD中重子化学势的作用相当于Potts模型中外场的作用，它们的变化导致温度驱使的相变从一级变到二级，再到平滑过渡。

对于一级相变、二级相变和平滑过渡，分别选取了外场h=0.000 5、0.000 775、0.000 2三个值。令$X = \langle M \rangle$，在每个外场下，模拟了尺度L在40~70之间不同大小的系统，分别计算了二阶感应率($\chi_2 = C_2/V$)，给出了它们在相变温度附近的行为。三个外场下的二阶感应率分别在图3的三个子图中显示出来。每个子图中不同颜色的线代表不同的系统尺度。从图中可以看出，在一级相变(图3(a))、二级相变(图3(b))以及平滑过渡(图3(c))的时候，二阶感应率在相变温度($T_{\rm pt}$)附近都呈现出一个峰。我们知道，在热力学极限下，对于一级相变，二阶感应率应该是一个δ函数，对于二级相变，二阶感应率会发散。有限的系统使它在两种相变中都变成一个有限的峰[52–53]。随着系统尺度的增加，峰的位置向高温方向移动。比较图3中的三个子图，可以看出，在相变温度附近，不同的外场下，二阶感应率的基本结构是相似，都有一个峰。表明在相变温度附近，有限系统感应率会出现非单调行为，这些非单调行为不仅发生在二级相变的临界温度附近，也会发生在一级相变和平滑过渡区域。

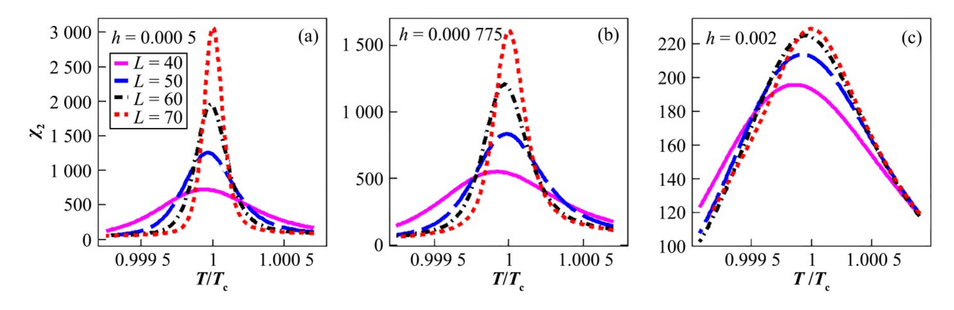


图3 在4个不同尺度L=40, 50, 60, 70的系统中，不同的外场h=0.000 5 (a), 0.000 775 (b), 0.002 (c)下，二阶感应率χ_2随温度$T/T_{\rm pt}$变化的行为

Fig.3 χ_2 *vs.* $T/T_{\rm pt}$ at h= 0.000 5 (a), 0.000 775 (b), 0.002 (c) with the system sizes of L = 40, 50, 60, 70

2.2 有限系统临界参数的确定

相图给出了发生相变边界的位置，为了精确确定相边界的位置，必须先给出一些关键点的位置，如：二级相变的临界点就是一个这样的关键点，临界点的温度T_c，即临界温度就是人们最感兴趣的参数。我们知道，如果系统的体积足够大，T_c可由磁化率分

布的峰值位置近似确定；但是，从上面的讨论我们知道，对于有限系尺度系统，其峰值的位置随系统尺度变化。如果通过有限系统观测量的涨落来确定相变参数，那么，必须利用有限尺度标度律。

对于有限尺度系统，如果发生二级或一级相变，某些观察量，如磁化率等，在不同系统尺度下的观测结果可以标度到一个普适的等式，这就是所谓的有限尺度标度律，即：

$$Q(T,L) = L^{-\lambda/v} f_Q\left(tL^{1/v}\right) \tag{9}$$

式中：$Q(T,L)$是观测量，一般是温度和系统尺度的函数；$t=(T-T_{pt})/T_{pt}$为约化温度，T_{pt}也就是前面所提到的相变温度；f_Q为标度函数；λ和v分别是观察量Q和关联长ξ对应的标度指数。其中：标度指数率$a = \lambda/v$，对于二级相变临界点，a是介于d~0之间的分数；对于一级相变，a只依赖于系统维度d，是维度的整数倍$(n-1)d$，其中n代表自由能对温度和外场偏导的阶数。

图4(a)给出了在无外场的情况下，二维Ising模型二级相变的有限尺度标度行为，图4(c)是在外场h=0.000 5的情况下，三维三态Potts模型一级相变的有限尺度标度行为。由图4可见，不同尺度标度的磁化强度曲线在临界点附近和一级相变区域都很好地重合在一起。通常，人们利用这个标度规律确定临界温度和临界指数时，都是预先给定这两个参数，然后看标度曲线是否能重叠在一起，即：通过观察不同尺度标度的观测量曲线在约化温度处的重合情况，评估事先假定的相变参数是否正确[33,54−55]。显然，这种方法存在很大的不确定性，首先，标度曲线重合情况大多由肉眼判断，无法定量描述；另外，在相变约化温度附近，相应的重合区域比较大，如图4(a)和(c)所示，加之标度尺度因子的加入，一般无法精确确定对应的相变参数。

如果将标度曲线的自变量选为温度，那么，标度曲线在偏离相变温度时就会彼此分开，如图4(b)和(d)所示，仅在相变温度处，标度曲线交于一点，即固定点。固定点对应的温度和标度指数率即为相变温度和相变标度指数率。显然，相对于双标度曲线(图4(a)和(c))，单标度曲线的固定点(图4(b)和(d))能够完全精确地给出对应的相变参数，而且，定量判定固定点比曲线重合要简单、容易得多。

根据重整化群理论，临界点为不稳定固定点[56−57]，一级相变线上是不连续的固定点[58−59]。在平滑过渡相转变区域，观察量不依赖于系统尺度，如果将有限尺度标度性推广到平滑过渡区域，这时标度指数率为0，标度曲线完全重合。

由图4(b)和4(d)可以看到，当温度越来越远离

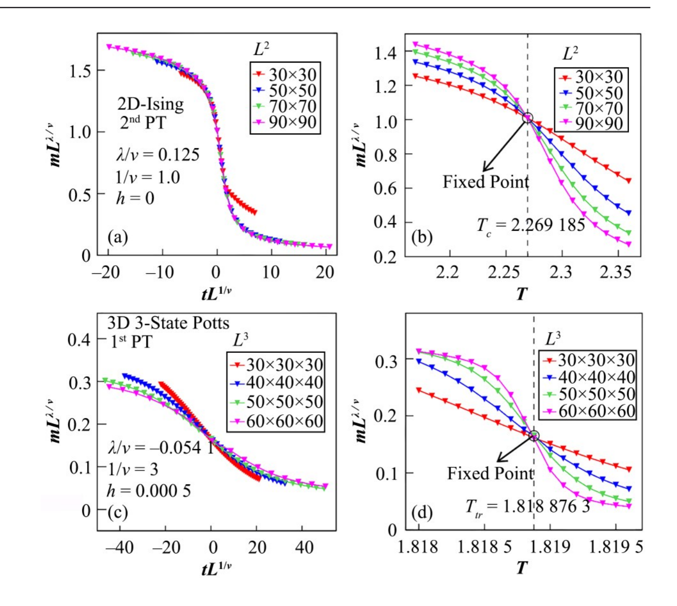


图4 标度平均磁化强度$mL^{\lambda/v}$随自变量标度约化温度$tL^{1/v}$ (a, c)和温度T (b, d)的变化关系
(a, b) 无外场h=0下的二维Ising模型，(c, d) 外场h=0.000 5下的三维三态potts模型

Fig.4 The scaled order parameter $mL^{\lambda/v}$ *vs*. the scaled variable $tL^{1/v}$ (a, c) and T (b, d)
(a, b) 2D Ising model with external field h=0, (c, d) 3D three-state Potts model with h=0.000 5

临界温度时，不同尺度标度的观测量也越来越分散；反之，当温度越来越靠近临界温度时，不同尺度标度的观测量逐渐聚拢，在临界温度处汇聚成固定点。因此，可以根据不同尺度观测量的聚集度(分布的宽度)来定义固定点。在固定温度和标度指数率时，定义分布宽度为不同尺度标度观测点$Q(T,L)L^a$样本的标准方差的平方根[54,60]，即：

$$D(T,a) = \sqrt{\frac{\Delta S_{Q(T,L)L^a}}{N_L - 1}} \tag{10}$$

式中：$D(T,\ a)$是温度T和标度指数率a的函数；N_L是不同系统尺度的个数；$\Delta S_{Q(T,L)L^a}$是所有标度观测量相对于它们期望值的偏差加权方差值，即：

$$\Delta S_{Q(T,L)L^a} = \sum_{i=1}^{N_L} \frac{\left[Q(T,L_i)L_i^a - \left\langle Q(T,L)L^a\right\rangle\right]^2}{\omega_i^2} \tag{11}$$

权重因子$\omega_i = \delta\left[Q(T,L_i)L_i^a\right]$是尺度标度的观察量$Q(T,L_i)L_i^a$的误差。$\left\langle Q(T,L)L^a\right\rangle$为加权期望值。

当T和a越来越远离相变值时，不同尺度的标度曲线越来越分散，相应$D(T,\ a)$增加；当T和a逐渐接近相变值时，不同尺度的标度曲线逐渐聚拢，相应$D(T,\ a)$减小。当T和a都达到相变值时，理论上不同尺度的标度点$Q(T,L)L^a$取相同值，并相交于固定点，这时$D(T,\ a)$达到极小值$D(T,\ a)_{\min}$约为1。随着温度和标度指数率的改变，标度观测点的分布

宽度呈现分散和聚拢的趋势是形成固定点的必要条件。由于观测量的测量误差，以及其他实际测量过程中的不确定因素，固定点并不是一个理想的点，实际上相应$D(T, a)_{\min}$会比1大。

如果改变T和a，$D(T, a)$存在极小值，并且约为1，就意味着标度观察量$Q(T,L)L^a$曲线相交于固定点，固定点所对应的T和a就是相边界的特征参数。不同相变类型对应的特征参数不同，临界点处标度指数率为分数，一级相变线上标度指数率是与系统维度有关的整数，crossover区域由于观察量不依赖于系统尺度，在整个相转变温度区域$D(T, a)$都近似为常数1，对应的标度指数率a为0。

现在，以三维三态Potts模型在三个相变区域产生的数据为例，说明如何应用上面对固定点定量描述的方法来确定相边界参数。三个相变区域分别是二级相变的临界点、一级相变线和平滑过渡区，对应的外场为：h=0.000 775、0.000 5和0.002，观测量为平均磁化强度，即：序参量。首先，在相变参数的平面上，即：T和a的平面上，画出我们定义的标度观察量的分布宽度$D(T, a)$，如图5所示的等高线。图5每个子图右侧的颜色线条代表宽度$D(T, a)$的大小，其中：红色和蓝色分别代表最小值和最大值。在T和a平面内，各类颜色分布代表标度曲线分布宽度D在不同位置的大小。a的取值范围为–1.2~1.15，其中间隔为0.05。

当外场取h=0.000 775和0.000 5时，对应图5(a)中的二级相变点和图5(b)一级相变线附近。通过改变T和a，图5(a)和(b)中的D值会出现逐渐减小的一块红色区域，其中：颜色最红的位置就是宽度取极小值的位置，不同尺度标度的序参量曲线在此交于一点，即：固定点。图5(a)(或(b))中两条相互垂直点线的交点标出了相变参数平面内宽度取极小值的位置，该位置对应的相变参数就是临界温度和标度指数率(或一级相变的温度和标度指数律)。因此，相变参数平面内的宽度等高图精确给出了临界区域和一级相变固定点的位置。

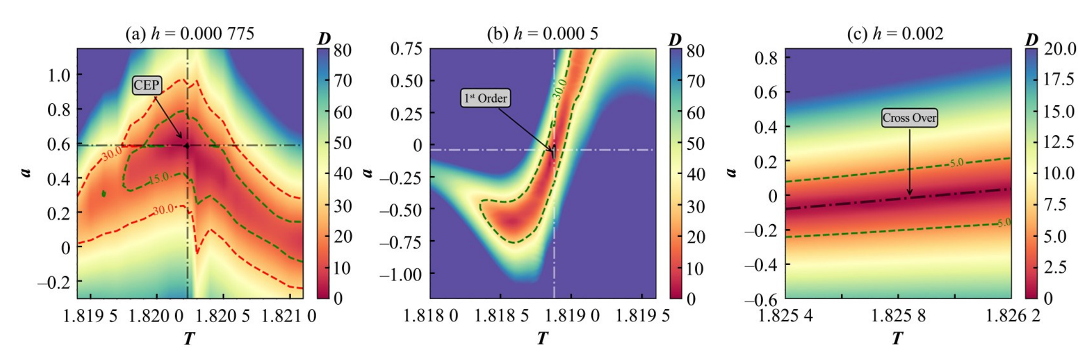


图5 三个外场处，在温度T和标度指数率a的平面上分布宽度$D(T, a)$的等高图
(a) h = 0.000 775，(b) h = 0.000 5，(c) h = 0.002

Fig.5 Contour plot of $D(T, a)$ for three different external fields (a) h = 0.000 775, (b) h = 0.000 5, (c) h = 0.002

当外场取h=0.002时，对应图5(c)中的平滑过渡区域，这里D值的等高线平行于T轴，呈带状分布，带子的颜色逐渐变化，在黑色的点线a=0附近最红，$D(T, a)$接近常数1，这些特征完全不同于图5(a)和(b)中的分布。表明在平滑过渡区域，标度曲线不依赖于系统尺度，$D(T, a)$不依赖相过渡温度，它的值只随着a改变，相过渡的标度指数率为0。

由此可见，分布宽度值D的大小对相边界上的固定点行为十分敏感，可以很好地描述固定点行为，确定相边界相变特征参数，以及区分不同的相变类型。当然，具体将固定点方法应用到重离子碰撞实验RHIC能量扫描计划中，不仅需对诸如观测量的选取做出谨慎的讨论，因为，有限尺度系统的标度规律和固定点行为只对某些像自由能对外场的偏导，即：磁化强度、磁化率，会表现出较好的有限尺度标度性和明显的固定点行为；对于像自由能对温度偏导的能量样的观测量，如内能、比热，在临界(相变)区域受非奇异部分的影响，其有限尺度标度行为会破坏，没有明显的固定点行为。而且，对于像系统尺度、温度样的物理量如何与相对论重离子碰撞中的相关物理量对应，还需要认真地研究决定。

3 有限演化时间的影响

通常，基于格点QCD和各种QCD模型的计算都假设系统达到了热力学的平衡态[34–35,37]。但是，相对论重离子碰撞中形成的火球存在的时间非常有限，只有约10 fm·c^{-1}，系统很可能没有时间演化到热力学平衡态[29,61–62]。一般可能的状态是以下三种情况：1)如果碰撞能量足够高，系统经过热化达到解禁闭相变所需的温度，系统达到热平衡[62]，夸克和胶子等离子体(Quark-Gluon Plasma，QGP)形成；2)也可

能系统达到局域热平衡，形成QGP的droplet；3）还可能完全没有达到热平衡，没有经历任何相变。因此，平衡、局域平衡和非平衡是相对论重离子碰撞后可能形成的三种状态。此外，在临界区域，临界慢化也会使系统更难于达到热力学平衡态[37]。

通常人们利用动力学演化方程（例如Langevin动力学方程[36−37]、流体力学方程[63−64]和各种的弛豫模型[34−35,65−66]）来估计QCD临界区的非平衡效应。但是，目前动力学演化方程仅在临界点、平滑过渡区域能精确求解，在一级相边界处尚无法精确求解。我们知道，Metropolis算法能够很好地模拟Ising模型的非平衡演化[67−68]。这样可以方便地得到整个相边界上非平衡弛豫过程的数值结果。然后，给出Ising模型的非平衡演化特征，并引入了描述非平衡演化的时间尺度。最后，讨论非平衡演化对观测量的影响。

3.1　非平衡演化的时间描述和特征

从一种初始位形开始，Ising系统可以自发演化到平衡态，达到平衡之前的演化称为弛豫过程或非平衡演化。图6(a~d)给出了从随机位形开始，系统尺度L=60，4个温度下，即T/T_c分别为0.93、0.99、1.00和1.03，磁化强度的绝对值$|m|$随时间的演化（使用m的绝对值是因为在h=0时磁化强度的符号随机，两条曲线是从样本中随机选择的两个演化过程），每个温度进行了5 000次演化。前两个温度在一阶相变线上，T/T_c=1.00是临界点，T/T_c=1.03是平滑过渡。水平轴是时间t，即：sweep数（每完成一次对所有格点（N=L×L×L）的判别，称为一次扫描（sweep），每完成一个sweep，系统的位形就更新一次）。两条曲线是从样本中随机选择的两个演化过程。

在图6(a)中，$|m|$开始逐渐增加，然后趋于稳定值μ。如果观察量与平衡期望值的差异大于平衡时的方均根$\sigma=\langle(x-\mu)^2\rangle^{1/2}$，系统远未达到平衡。从非平衡演化到平衡的时间称为弛豫时间。在模拟中，第i个演化过程的弛豫时间$\tau^i_{\rm eq}$是在$|m|$值进入区间$(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$后的步数。图6(a)中，两条曲线的稳定值相同，但是，一条曲线的弛豫时间比另一条曲线长很多。在低温时，不同曲线的弛豫时间差异显著，如图6(a)和(b)；在高温时，差异明显减小，如图6(c)和(d)所示。

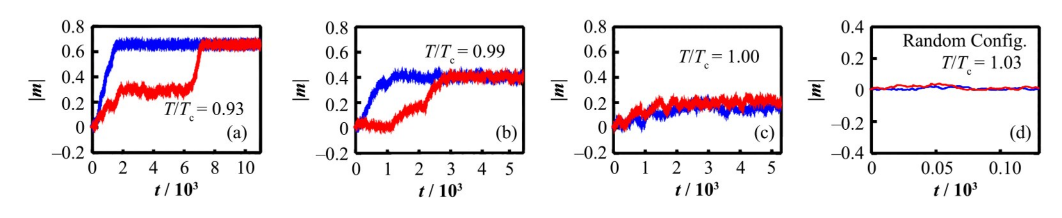


图6　温度T/T_c分别为0.93 (a)、0.99 (b)、1.00 (c)和1.03 (d)时，随机初始位形在L=60时，$|m|$随时间的演化过程
Fig.6　The evolution of $|m|$ with time at L = 60 for random initial configuration at temperatures T/T_c = 0.93 (a), 0.99 (b), 1.00 (c) and 1.03 (d), respectively

为了量化不同系统演化的弛豫特征，定义给定系统的平均弛豫时间为：

$$\bar{\tau}_{\rm eq}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau^i_{\rm eq}\tag{12}$$

式中：n是演化过程的总数；$\tau^i_{\rm eq}$是第i个演化过程的弛豫时间。显然，在$\bar{\tau}_{\rm eq}$时，并不是所有系统都能达到平衡态，其中部分系统很可能还处于非平衡状态。

通常，弛豫时间取决于系统演化的动力学机制、系统尺度、温度，以及初始位形等。图7给出了平均弛豫时间随温度、系统尺度和初始位形的变化。在T_c附近，平均弛豫时间的峰值随着系统尺度而增大，如图7(a)所示。图7(b)表明，无论选择随机初始位形还是极化初始位形，平均弛豫时间在T_c处都出现峰值，这是由于临界慢化所导致的弛豫时间变长。

理论上，对于无限大系统，在临界温度T_c附近，动力学的弛豫时间发散，即：

$$\tau^{\rm dyn}_{\rm eq}\propto\xi^z\propto|T-T_c|^{-z\nu}\tag{13}$$

式中：υ是关联长度的临界指数；z是动力学指数，它与动力学的普适类相关。对于有限系统尺度，弛豫时间具有幂律行为，即：

$$\tau^{\rm dyn}_{\rm eq}\propto L^z\tag{14}$$

对应地，我们检验了所定义的平均弛豫时间$\bar{\tau}_{\rm eq}$在临界温度处与系统尺度的双对数图，其线性拟合斜率为2.06±0.03，与文献[69−70]一致。因此，平均弛豫时间$\bar{\tau}_{\rm eq}$也随着系统尺度的z次幂发散，与$\tau^{\rm dyn}_{\rm eq}$的行为相同。这表明：模拟系统的平均弛豫时间与动力学弛豫时间一样，也能够很好地量化给定系统的时间演化特征。

对于T>T_c，平均弛豫时间基本不依赖于系统尺度和初始位形，如图7(a)和(b)所示，无论系统大小和初始位形如何，平均弛豫时间都很短，并趋近于零。这是由于接受概率$A(u\rightarrow v)$（式(12)）是T的增加函数，温度越高，接受概率越高，所需弛豫时间越短，系统更容易从一种位形演化到另一种位形。

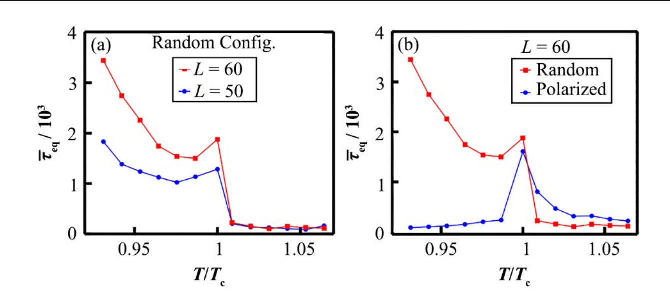


图7　平均弛豫时间随温度的变化

(a) 随机初始位形系统尺度L=50和60，(b) 固定系统尺度L=60，随机初始位形和极化初始位形

Fig.7　Average relaxation time as a function of temperature

(a) System sizes L = 50 and 60 starting from random initial configuration, (b) Random initial configurations and polarized initial configurations at a fixed system size L=60

相反，对于$T<T_c$，平均弛豫时间强烈依赖于系统尺度和初始位形。首先，图7(a)表明，系统尺度越大，平均弛豫时间越长。另外，图7(b)还表明，随机位形的平均弛豫时间比极化位形长得多，这是因为$T<T_c$的平衡态接近有序相，对于极化位形，其本身就是有序相，因此，无需太长时间的演化就可以达到有序相的平衡态；但是，对于随机位形，其本身接近无序相，因此，需要很长时间的演化才能达到有序相的平衡态。所以，极化初始位形演化为有序状态的速度比随机初始位形快。显然，初始位形偏离平衡状态越远，弛豫时间越长。因此，在T_c左侧，随机位形的平均弛豫时间更长，而在T_c右侧，极化位形的平均弛豫时间更长，如图7(b)所示。为了观察非平衡演化的最大影响，下面将在$T⩽T_c$时，选用随机初始位形；而在$T>T_c$时，选用极化初始位形。

3.2　非平衡演化对磁化强度高阶矩的影响

非平衡演化对观测量的影响可以从观测时间的角度来看。我们知道弛豫时间的分布随温度变化，对于固定温度和尺寸的系统，两次模拟的弛豫时间也可能不同，如图6(a)中的曲线所示。所以，如果测量的时间不是足够长，那么，有些系统很可能尚未达到平衡，观测到的所有过程中就会存在一定比例的非平衡过程，这与相对论重离子碰撞的情况非常相似。

如前所述：相对论重离子碰撞中临界涨落敏感的观测量是序参量高阶矩，对Ising模型来说，令式(1)中$X = |m|$, $\delta X = |m| - \langle |m| \rangle$，图8给出了临界温度附近两个固定温度下各阶矩随观测时间的变化。在t=0时，图8(a~d)中的$C_{n=1,2,3,4}$全部为零，这是因为初始位形是随机位形的结果。当初始位形是极化位形时，C_1为1，$C_{2,3,4}$为零，如图8(e~h)所示。

图8(a)和(e)中，C_1随时间单调变化，最后以指数接近平衡值，这与朗之万方程的动力学演化行为一致。表明Metropolis算法很好地模拟了Ising模型的非平衡演化。图8(a~d)T/T_c=0.99，图8(b)中，C_2先增加后减少，在演化过程中形成峰值。图8(c)和(d)中，C_3和C_4在接近稳定值之前都经历振荡，振荡导致演化过程中的符号变化。C_3和C_4的符号可以是正或负，正或负取决于演化时间。

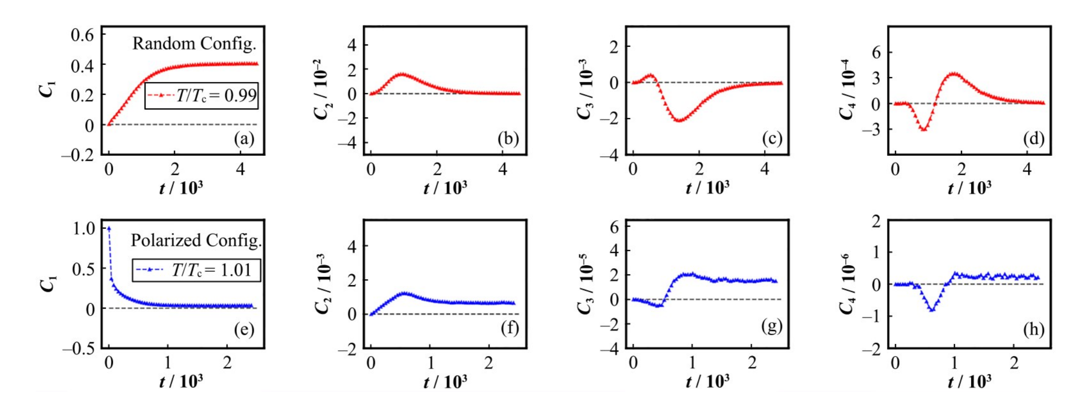


图8　在T/T_c=0.99 (a~d)和1.01 (e~h)时，给定系统大小L=60时$|m|$各阶矩的时间演化

Fig.8　The time evolution of cumulants of $|m|$ at a given system size L=60 at T/T_c=0.99 (a~d) and 1.01 (e~h)

图8(e~h)T/T_c=1.01，各阶矩随时间的变化趋势类似于图8(a~d)。C_2在接近稳定值之前经历非单调变化，C_3也示出与图8(c)类似的符号变化，但是，图8(g)与(c)相反，符号首先为负，然后变为正。图

8(h)中的C_4也以与图8(d)类似的符号变化，先为负，然后为正。C_3和C_4的符号也可以是正或负，正或负取决于观测时间。这里，C_3和C_4的符号变化与动力学方程的解一致[34-35]。

但是，要注意到定量上T_c两侧各阶矩的差异非常大。首先，在T/T_c=0.99时，接近C_3平衡预期所需的时间约为4 000，而在T/T_c=1.01时，所需时间小于2 000。差异超过两倍。也就是说，对于$T<T_c$的系统来说，在相同的时间内达到平衡需要更长的时间。另外，C_3和C_4在$T<T_c$时的振荡幅度远大于$T>T_c$，相差大约是两个数量级。这意味着在高于临界温度端，非平衡效应的影响非常小，可以忽略不计；而在低于临界温度端，非平衡效应的影响非常大，不可忽略。

4 结语

我们系统研究了相对论重离子碰撞中，由观测量——守恒荷高阶矩确定临界涨落时，非临界涨落、有限系统尺度和有限演化时间对观测结果的影响。

1)对于非临界涨落，讨论了守恒荷高阶矩测量所需要的基本统计量。发现对于四阶矩，如果按每个Nch的CBWC方法计算，总统计量必须大于25 M。建议用0.1%中心度作为Nch bin的宽度，不仅能与每个Nch一样精确代表初始体积的涨落，而且，所需的总统计量在1 M量级就可以保证四阶矩测量的可靠性。对于六阶矩，总统计量比四阶矩增加一个量级(300 M)都不够，0.1%中心度的建议对六阶矩是否可行尚需进一步研究。

对于末态粒子数有限所导致的统计涨落，建议从所有粒子和反粒子独立发射并服从泊松分布假设出发，推导了三种守恒荷的分布和高阶矩，结果都和玻尔兹曼近似下的强子共振气体模型所得到的结果一致。通过将泊松分布估计的统计涨落与RHIC上产生的净质子数高阶矩比较发现，实验测量的净质子数高阶矩对碰撞中心度和能量依赖性主要是统计涨落的贡献，并强调了统计涨落不可忽略！

最后，给出了用池子混合事件样本的方法估计整体和系统非临界涨落对守恒荷高阶矩的影响，定义动力学高阶矩为实验数据样本所测量的高阶矩减去对应混合样本的高阶矩。通过利用AMPT default模型模拟产生19.6 GeV金-金碰撞的样本，展示了池子混合事件样本方法的有效性。结果表明：所得到动力学高阶矩不仅能有效扣除统计涨落的影响，而且，能够像中心度bin宽度修正和探测器效率修正公式一样有效扣除这两个因素对高阶矩测量的影响。因此，对于由全局和系统效应所导致的非临界涨落，混合样本提供了一个很好的背景信号。同时，动力学高阶矩能有效观测RHIC BES试验中临界相关的涨落。

2)对于有限系统尺度对临界观测量的影响，首先利用三维三态Potts模型计算了在不同相边界区域，不同系统尺度时，磁化率高阶矩随温度的涨落，发现磁化率二阶矩在一级相变、二级相变临界点以及平滑过渡区域都具有相似的峰值结构，而且，峰值的位置随系统的尺度变化；同时，磁化率四阶矩在这三个区域也都出现符号改变和振荡的行为。表明在相变温度附近，有限系统高阶感应率中会出现非单调，或者符号改变的行为，这些行为不仅发生在二级相变的临界温度附近，也会发生在一级相变和平滑过渡区域。而且，对于有限系统尺度系统，其临界参数也不能简单地由观测量峰值的位置决定，必须由有限尺度的标度规律确定。

因此，提出利用有限尺度标度律所表现的固定点行为能更精确地给出相变参数，并给出了对固定点行为的定量描述，即：定义了不同尺度标度观测量在相变参数附近的分布宽度，宽度的极小值对应于固定点。反之，由这样定义的宽度在相变参数(温度和相变指数率)平面的等高图，可以精确决定相变参数。

以三维三态Potts模型的平均磁化强度为例，给出了平均磁化强度在相边界三个不同区域附近，标度曲线在相变参数平面上的等高图，由图的分布极值位置，以及分布特征，不仅可以精确确定相变参数，而且可以判别相变级数。

当然，将固定点方法应用到相对论重离子碰撞中还有很多待解决的问题，首先是必须选择跟磁化率类似的观测量，守恒荷高阶矩可能是一个非常好的选择。然后是如何将实验中的碰撞能量、中心度等与系统的温度、尺度对应。

3)对于有限演化时间导致某些系统可能没有达到热力学的平衡态，即非平衡演化过程的影响，提出利用Metropolis算法模拟三维伊辛模型的非平衡演化，并定义了系统的平均弛豫时间，通过模拟零外磁场下三维伊辛模型的非平衡演化，结果显示：伊辛模型中序参量的非平衡演化确实以指数方式接近其稳定值，与朗之万方程的解相同。临界温度下的平均弛豫时间随系统尺度的z次幂发散，与动力学方程中的弛豫时间相同，表明所用模拟方法与解动力学方程一样有效，所定义的平均弛豫时间正确描述了系统动力学时间演化的特征。

同时，通过模拟方法研究了非平衡演化的特征，发现平均弛豫时间取决于系统尺度和温度。$T>T_c$时

的平均弛豫时间非常短，几乎与初始位形无关；在 $T<T_c$ 时，当初始位形远离平衡状态时，平均弛豫时间比 $T>T_c$ 长很多，在一级相变线上，系统更难达到平衡。因此，在一级相变区域，非平衡因素的影响不可忽略。但是，在平滑过渡区域，非平衡因素的影响可以忽略不计。

通过研究非平衡演化对观测量的影响，给出了序参量各阶矩的时间演化结果。结果发现非平衡过程对高阶矩的影响比低阶矩大，并且，C_3 和 C_4 都显示振荡，其值可能取正或负，取决于观察时间，这与动力学理论计算的结果一致。

这些非平衡演化的定性特征趋势不依赖于系统，可以直接作为相对论重离子碰撞实验测量的参考，非平衡演化对确定QCD相边界的影响在平滑过渡区域几乎可以忽略不计，但是，在一阶相变线上，非平衡演化的影响不可忽略。另外，由于非平衡态的影响，序参量的三阶矩的符号可能出现负值，与RHIC/STAR的测量结果一致。

本文综述了近15年来，我们在通过相对论重离子碰撞确定QCD相边界方面的主要工作。由此可见，最终确定QCD相边界仍然任重道远，还有很多问题需要进一步的研究。关于间歇理论和实验方面的工作可以参考综述文章[71–74]。

作者贡献声明 吴元芳主要负责本文的撰写，总体设计和指导了大部分的具体工作；李笑冰§3工作的主要完成人，主要负责该论文的编辑、审核工作；陈丽珠§1.1工作的主要完成人，完成§1.2的部分工作，参与§1.3以及§2部分工作的讨论，并完成了部分奠基工作；李治明参与部分工作的讨论，提出建议；许明梅§3部分工作的主要撰稿、指导，参与其他部分工作的讨论，提出建议；潘雪§1.2、§2.1工作的主要完成人，并完成了§2.2的奠基工作；张凡§1.3工作的主要完成人，参与了§1.2工作的讨论，并完成部分工作；张雁华§2.2工作的主要完成人，参与了§3部分工作的讨论，提出建议；钟昱明主要负责本文的公式输入、辅助编辑工作。

参考文献

1 STAR Note 0598. BES-II whitepaper[M]. 2014.

2 Yin Y. QCD phase structure at high baryon density region [R].Wuhan: CCNU, 2019.

3 Luo X. Exploring the QCD phase structure with beam energy scan in heavy-ion collisions[J]. Nuclear Physics A, 2016, **956**: 75 – 82. DOI: 10.1016/j. nuclphysa. 2016. 03.025.

4 Aoki Y, Endrodi G, Fodor Z, *et al*. The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics[J]. Nature, 2006, **443** (7112): 675 – 678. DOI: 10.1038/nature05120.

5 丁亨通, 李胜泰, 刘俊宏. 强磁场下的格点QCD研究进展[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040008. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040008.

DING Hengtong, LI Shengtai, LIU Junhong. Progress on QCD properties in strong magnetic fields from lattice QCD[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040008. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040008.

6 Masayuki A, Koichi Y. Chiral restoration at finite density and temperature[J]. Nuclear Physics A, 1989, **504**(4): 668 – 684. DOI: 10.1016/0375-9474(89)90002-X.

7 Blume C. Search for the critical point and the onset of deconfinement[J]. Central European Journal of Physics, 2012, **10**(6): 1245 – 1253. DOI: 10.2478/s11534-012-0088-x.

8 Stephanov M, Rajagopal K, Shuryak E. Signatures of the tricritical point in QCD[J]. Physical Review Letters, 1998, **81**(22): 4816 – 4819. DOI: 10.1103/physrevlett. 81.4816.

9 Stephanov M A. Sign of kurtosis near the QCD critical point[J]. Physical Review Letters, 2011, **107**(5): 052301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.052301.

10 Friman B, Karsch F, Redlich K, *et al*. Fluctuations as probe of the QCD phase transition and freeze-out in heavy ion collisions at LHC and RHIC[J]. The European Physical Journal C, 2011, **71**(7): 1694. DOI: 10.1140/epjc/s10052-011-1694-2.

11 Aggarwal M M, Ahammed Z, Alakhverdyants A V, *et al*. Higher moments of net proton multiplicity distributions at RHIC[J]. Physical Review Letters, 2010, **105**(2): 022302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.022302.

12 Adamczyk L, Adkins J K, Agakishiev G, *et al*. Beam energy dependence of moments of the net-charge multiplicity distributions in Au+Au collisions at RHIC[J]. Physical Review Letters, 2014, **113**(9): 092301. DOI: 10. 1088/1674-1137/44/1/014002.

13 Adamczyk L, Adkins J K, Agakishiev G, *et al*. Energy dependence of moments of net-proton multiplicity distributions at RHIC[J]. Physical Review Letters, 2014, **112**(3): 032302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112. 032302.

14 Luo X F, Xu N. Search for the QCD critical point with fluctuations of conserved quantities in relativistic heavy-ion collisions at RHIC: an overview[J]. Nuclear Science and Techniques, 2017, **28**(8): 112. DOI: 10.1007/s41365-

017-0257-0.

15 Fraga E S, Palhares L F, Sorensen P. Finite-size scaling as a tool in the search for the QCD critical point in heavy ion data[J]. Physical Review C, 2011, **84**(1): 011903. DOI: 10.1103/physrevc.84.011903.

16 Chen L Z, Chen X S, Wu Y F. Locating critical point of QCD phase transition basing on finite-size scaling[EB/OL]. 2009: arXiv: 0904.1040. https://arxiv. org/abs/0904.1040.

17 Chen L Z, Zhao Y Y, Pan X, *et al*. High cumulants of conserved charges and their statistical uncertainties[J]. Chinese Physics C, 2017, **41**(10): 104103. DOI: 10.1088/1674-1137/41/10/104103.

18 Chen L Z, Li Z, Cui F, *et al*. Measurement of the ratio of the sixth order to the second order cumulant of net-proton multiplicity distributions in relativistic heavy-ion collisions[J]. Nuclear Physics A, 2017, **957**: 60 – 70. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2016.07.007.

19 Chen L Z, Pan X, Xiong F B, *et al*. Statistical and dynamical fluctuations in the ratios of higher net-proton cumulants in relativistic heavy-ion collisions[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2011, **38**(11): 115004. DOI: 10.1088/0954-3899/38/11/115004.

20 Pan X, Zhang F, Li Z M, *et al*. Statistical and dynamical parts of the cumulants of conserved charges in relativistic heavy ion collisions[J]. Physical Review C, 2014, **89**(1): 014904. DOI: 10.1103/physrevc.89.014904.

21 Bzdak A, Koch V. Local efficiency corrections to higher order cumulants[J]. Physical Review C, 2015, **91**(2): 027901. DOI: 10.1103/physrevc.91.027901.

22 Bzdak A, Koch V, Skokov V. Baryon number conservation and the cumulants of the net proton distribution[J]. Physical Review C, 2013, **87**(1): 014901. DOI: 10.1103/physrevc.87.014901.

23 Luo X F. Probing the QCD critical point with higher moments of net-proton multiplicity distributions[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2011, **316**(1): 012003. DOI: 10.1088/1742-6596/316/1/012003.

24 Zhang F, Li Z M, Chen L Z, *et al*. The method of mixed events for higher cumulants of conserved charges[EB/OL]. 2019: arXiv: 1908.05465. DOI: 10.48550/arXiv.1908.05465.

25 Zhang F, Li Z M, Chen L Z, *et al*. Subtracting non-critical fluctuations in higher cumulants of conserved charges[EB/OL]. 2019: arXiv: 1908.05470. DOI: 10.48550/arXiv.1908.05470.

26 Chen L Z, Pan X, Chen X S, *et al*. Critical behavior of higher cumulants of order parameter in the 3D-Ising universality class[J]. Chinese Physics C, 2012, **36**(8): 727 – 732. DOI: 10.1088/1674-1137/36/8/008.

27 Pan X, Chen L Z, Chen X S, *et al*. High-order cumulants from the 3-dimensional $O(1, 2, 4)$ spin models[J]. Nuclear Physics A, 2013, **913**: 206 – 216. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2013.06.010.

28 Pan X, Chen L Z, Chen X S, *et al*. Cumulants in the 3-dimensional Ising, $O(2)$ and $O(4)$ spin models[J]. Chinese Physics C, 2013, **37**(12): 124103. DOI: 10.1088/1674-1137/37/12/124103.

29 刘云朋, 庄鹏飞. 相对论重离子碰撞中的重味产生[J]. 原子核物理评论, 2012, **29**(1): 1 – 13. DOI: 10.11804/NuclPhysRev.29.01.001.

LIU Yunpeng, ZHUANG Pengfei. Heavy flavor production in relativistic heavy ion collisions[J]. Nuclear Physics Review, 2012, **29**(1): 1 – 13. DOI: 10.11804/NuclPhysRev.29.01.001.

30 Pan X, Xu M M, Wu Y F. Generalized susceptibilities along the phase boundary of the three-dimensional, three-state Potts model[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2015, **42**(1): 015104. DOI: 10.1088/0954-3899/42/1/015104.

31 Pan X, Chen L Z, Wu Y F. Behavior and finite-size effects of the sixth order cumulant in the three-dimensional Ising universality class[J]. Chinese Physics C, 2016, **40**(9): 093104. DOI: 10.1088/1674-1137/40/9/093104.

32 Pan X, Zhang Y H, Chen L Z, *et al*. Finite-size behaviour of generalized susceptibilities in the whole phase plane of the Potts model[J]. Chinese Physics C, 2018, **42**(2): 023110. DOI: 10.1088/1674-1137/42/2/023110.

33 Lacey R A. Indications for a critical end point in the phase diagram for hot and dense nuclear matter[J]. Physical Review Letters, 2015, **114**(14): 142301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.142301.

34 Mukherjee S, Venugopalan R, Yin Y. Real-time evolution of non-Gaussian cumulants in the QCD critical regime[J]. Physical Review C, 2015, **92**(3): 034912. DOI: 10.1103/physrevc.92.034912.

35 Nahrgang M, Bluhm M, Schäfer T, *et al*. Diffusive dynamics of critical fluctuations near the QCD critical point[J]. Physical Review D, 2019, **99**(11): 116015. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.116015.

36 Wu S J, Wu Z M, Song H C. Universal scaling of the σ field and net-protons from Langevin dynamics of model A

[J]. Physical Review C, 2019, **99**(6): 064902. DOI: 10.1103/physrevc.99.064902.

37 Berdnikov B, Rajagopal K. Slowing out of equilibrium near the QCD critical point[J]. Physical Review D, 2000, **61**(10): 105017. DOI: 10.1103/physrevd.61.105017.

38 Pisarski R D, Wilczek F. Remarks on the chiral phase transition in chromodynamics[J]. Physical Review D, 1984, **29**(2): 338–341. DOI: 10.1103/physrevd.29.338.

39 de Forcrand P, Philipsen O. Constraining the QCD phase diagram by tricritical lines at imaginary chemical potential [J]. Physical Review Letters, 2010, **105**(15): 152001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.152001.

40 Parotto P. Parametrized equation of state for QCD from 3D Ising model[J]. Pos, 2018, **CPOD2017**: 036. DOI: 10.22323/1.311.0036.

41 Chen L Z, Li Z M, Wu Y F. Influences of statistics and initial size fluctuation on high-order cumulants of conserved quantities in relativistic heavy ion collisions[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2014, **41**(10): 105107. DOI: 10.1088/0954-3899/41/10/105107.

42 Chen L Z, Li Z M, Zhong X, *et al*. Influence of statistics on the measured moments of conserved quantities in relativistic heavy ion collisions[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2015, **42**(6): 065103. DOI: 10.1088/0954-3899/42/6/065103.

43 JG S. The frequency distribution of the difference between two Poisson variates belonging to different populations[J]. Journal of the Royal Statistical Society Series A (General), 1946, **109**(Pt 3): 296–296. DOI: 10.2307/2981372.

44 Braun-Munzinger P, Friman B, Karsch F, *et al*. Net charge probability distributions in heavy ion collisions at chemical freeze-out[J]. Nuclear Physics A, 2012, **880**: 48–64. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2012.02.010.

45 Bzdak A, Koch V. Local efficiency corrections to higher order cumulants[J]. Physical Review C, 2015, **91**(2): 027901. DOI: 10.1103/physrevc.91.027901.

46 Luo X F. Unified description of efficiency correction and error estimation for moments of conserved quantities in heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2015, **91**(3): 034907. DOI: 10.1103/physrevc.91.034907.

47 Talapov A L, Blöte H W J. The magnetization of the 3D Ising model[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1996, **29**(17): 5727–5733. DOI: 10.1088/0305-4470/29/17/042.

48 Pawley G S, Swendsen R H, Wallace D J, *et al*. Monte Carlo renormalization-group calculations of critical behavior in the simple-cubic Ising model[J]. Physical Review B, 1984, **29**(7): 4030–4040. DOI: 10.1103/physrevb.29.4030.

49 Alexandrou C, Boriçi A, Feo A, *et al*. Deconfinement phase transition in one-flavor QCD[J]. Physical Review D, 1999, **60**(3): 034504. DOI: 10.1103/physrevd. 60.034504.

50 DeGrand T A, DeTar C E. Phase structure of QCD at high temperature with massive quarks and finite quark density: a $Z(3)$ paradigm[J]. Nuclear Physics B, 1983, **225**(4): 590–620. DOI: 10.1016/0550-3213(83)90536-9.

51 Wu F Y. The potts model[J]. Reviews of Modern Physics, 1982, **54**(1): 235–268. DOI: 10.1103/revmodphys.54.235.

52 Imry Y. Finite-size rounding of a first-order phase transition[J]. Physical Review B, 1980, **21**(5): 2042–2043. DOI: 10.1103/physrevb.21.2042.

53 Challa M S S, Landau D P, Binder K. Finite-size effects at temperature-driven first-order transitions[J]. Physical Review B, 1986, **34**(3): 1841. DOI: 10.1103/physrevb.34.1841.

54 Wu Y F, Chen L Z, Pan X, *et al*. Finite-size behaviour of a critical related observable[J]. Central European Journal of Physics, 2012, **10**(6): 1341–1344. DOI: 10.2478/s11534-012-0143-7.

55 Lacey R A, Liu P, Magdy N, *et al*. Finite-size scaling of non-Gaussian fluctuations near the QCD critical point[EB/OL]. arXiv preprint arXiv: 1606.08071, 2016. DOI: 10.48550/arXiv.1606.08071.

56 Wilson K G, Kogut J. The renormalization group and the ε expansion[J]. Physics Reports, 1974, **12**(2): 75–199. DOI: 10.1016/0370-1573(74)90023-4.

57 Binney J J, Dowrick N J, Fisher A J, *et al*. The theory of critical phenomena: an introduction to the renormalization group[M]. Oxford University Press, 1992.

58 Nienhuis B, Nauenberg M. First-order phase transitions in renormalization-group theory[J]. Physical Review Letters, 1975, **35**(8): 477–479. DOI: 10.1103/physrevlett.35.477.

59 Fisher M E, Berker A N. Scaling for first-order phase transitions in thermodynamic and finite systems[J]. Physical Review B, 1982, **26**(5): 2507–2513. DOI: 10.1103/physrevb.26.2507.

60 Zhang Y H, Zhao Y Y, Chen L Z, *et al*. Locating fixed points in the phase plane[J]. Physical Review E, 2019, **100** (5–1): 052146. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.052146.

61 Braun-Munzinger P, Stachel J. The quest for the quark-gluon plasma[J]. Nature, 2007, **448**(7151): 302 – 309. DOI: 10.1038/nature06080.

62 Adams J, Aggarwal M M, Ahammed Z, *et al*. Experimental and theoretical challenges in the search for the quark-gluon plasma: the STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions[J]. Nuclear Physics A, 2005, **757**(1 – 2): 102 – 183. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2005.03.085.

63 Zhang W N, Xu P Z. Effect of relaxation time on the squeezed correlations of bosons for evolving sources in relativistic heavy-ion collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2022, **33**(2): 22. DOI: 10.1007/s41365-022-01005-1.

64 Shen C, Yan L. Recent development of hydrodynamic modeling in heavy-ion collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2020, **31**(12): 122. DOI: 10.1007/s41365-020-00829-z.

65 Wu S J, Shen C, Song H C. Dynamically exploring the QCD matter at finite temperatures and densities: a short review[J]. Chinese Physics Letters, 2021, **38**(8): 081201. DOI: 10.1088/0256-307x/38/8/081201.

66 吴善进, 宋慧超. QCD临界点附近的动力学临界涨落[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040004. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040004.

WU Shanjin, SONG Huichao. Critical dynamical fluctuations near the QCD critical point[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040004. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040004.

67 Liu C W, Polkovnikov A, Sandvik A W. Dynamic scaling at classical phase transitions approached through nonequilibrium quenching[J]. Physical Review B, 2014, **89**(5): 054307. DOI: 10.1103/physrevb.89.054307.

68 Acharyya M. Nonequilibrium phase transition in the kinetic Ising model: critical slowing down and the specific-heat singularity[J]. Physical Review E, 1997, **56**(3): 2407 – 2411. DOI: 10.1103/physreve.56.2407.

69 Newman M E J, Barkema G T. Monte Carlo methods in statistical physics[M]. Oxford: Clarendon Press, 1999.

70 Hasenbusch M. Dynamic critical exponent *z* of the three-dimensional Ising universality class: Monte Carlo simulations of the improved Blume-Capel model[J]. Physical Review E, 2020, **101**(2 – 1): 022126. DOI: 10.1103/PhysRevE.101.022126.

71 Li Z M. Overview of intermittency analysis in heavy-ion collisions[J]. Modern Physics Letters A, 2022, **37**(13): 2230009. DOI: 10.1142/s0217732322300099.

72 De Wolf E A, Dremin I M, Kittel W. Scaling laws for density correlations and fluctuations in multiparticle dynamics[J]. Physics Reports, 1996, **270**(1 – 2): 1 – 141. DOI: 10.1016/0370-1573(95)00069-0.

73 Wu J, Lin Y F, Li Z M, *et al*. Intermittency analysis of proton numbers in heavy-ion collisions at energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider[J]. Physical Review C, 2021, **104**(3): 034902. DOI: 10.1103/physrevc.104.034902.

74 Wu J, Lin Y F, Wu Y F, *et al*. Probing QCD critical fluctuations from intermittency analysis in relativistic heavy-ion collisions[J]. Physics Letters B, 2020, **801**: 135186. DOI: 10.1016/j.physletb.2019.135186.